Nemkonvex kvadratikus egyenlőtlenségrendszerek pontos dualitással

Pólik Imre

McMaster University
Advanced Optimization Lab

ELTE TTK Operációkutatási Tanszék
Folytonos optimalizálás szeminárium
2004. július 6.

Kvadratikus egyenlőtlenségrendszerek

- Primál feladat

$$\begin{aligned} f(x) &< 0 \\ g_i(x) &\leq 0,\ i = 1, \ldots, m \end{aligned}$$

$x \in \mathbb{R}^n$, $f, g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kvadratikus ($x^T A x + b^T x + c$)

- Elégséges feltétel

$$\lambda \in \mathbb{R}^m_{\oplus}, \text{ amelyre } f(x) + \sum_i \lambda_i g_i(x) \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^n$$

- Mikor szükséges is?
  - Regularitási feltétel (Slater)
  - Konvex függvények
  - $m = 1$ (S-lemma, Yakubovich, 1971)

Az S-lemma

- Yakubovich, 1971
  Ha $\exists \bar{x} : g(\bar{x}) < 0$, akkor az alábbi két állítás ekvivalens:
  - $\nexists x \in \mathbb{R}^n : f(x) < 0,\ g(x) \leq 0$
  - $\exists y \geq 0 : f(x) + yg(x) \geq 0$ minden x-re
- Konvexitás nélkül!
  - Rejtett konvexitás
- Alkalmazások
  - Ljapunov-féle stabilitásvizsgálat
  - Ellipszoidtartalmazás
  - Számítógépes grafika

Megoldási módszerek

- Homogenizálás
  - Csak „kevés” egyenlet esetén
- SDP relaxáció
  - Rangkorlátozott lineáris mátrixegyenlőtlenségek
  - Viszonylag új terület
- Az együttes numerikus értékkészlet konvexitása
  - Klasszikus elmélet (Hausdorff, Töplitz)
- Általános konvexitás
  - König, Ky Fan

Jelölések

- Mátrixok

$$\begin{aligned} \mathbb{S}^n &: \; n \times n \text{ valós szimmetrikus mátrixok} \\ \mathbb{PS}^n \subseteq \mathbb{S}^n &: \; \text{pozitív szemidefinit mátrixok } \succ, \succeq \\ F \bullet G = &\; \mathrm{Tr}\,(FG) = \mathrm{Tr}\,(GF) \text{ skalárszorzat} \end{aligned}$$

- Primál feladat – homogén alak

$$x^T A x < 0,\ x^T B x \leq 0,\ x \in \mathbb{R}^n \text{ nem megoldható}$$

- Duál feladat – homogén alak

$$\exists \lambda \geq 0, \text{ amelyre } A + \lambda B \succeq 0$$

- Regularitási feltétel (Slater)

$$\exists \bar{x} : \bar{x}^T B \bar{x} < 0$$

Homogenizálás

- Két egyenlőtlenségre

$$
\begin{aligned}
x^T A_1 x + 2b_1^T x + c_1 &< 0 \\
x^T A_2 x + 2b_2^T x + c_2 &\leq 0
\end{aligned}
$$

- Homogenizáló változó

$$
\begin{aligned}
x^T A_1 x + 2b_1^T xt + c_1 t^2 &< 0 \\
x^T A_2 x + 2b_2^T xt + c_2 t^2 &\leq 0
\end{aligned}
$$

  - Eredeti megoldható $\Leftrightarrow$ homogén megoldható és $t = 1$

- A $t = 0$ esetet a Slater-feltétellel zárjuk ki.

SDP relaxáció

$$\begin{array}{rcl} x^TAx & < & 0 \\ x^TBx & \leq & 0 \end{array} \quad \underset{x \in \mathbb{R}^n}{\iff} \quad \begin{array}{rcl} A \bullet xx^T & < & 0 \\ B \bullet xx^T & \leq & 0 \end{array} \quad \iff \quad \begin{array}{rcl} A \bullet X & < & 0 \\ B \bullet X & \leq & 0 \\ \operatorname{rank}(X) & = & 1, \\ X & \succeq & 0 \end{array}$$

- Pataki, 1998: $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{S}^n$ affin altér, $\dim \mathcal{A} \geq \binom{n}{2} - \binom{r+2}{2} + 1$, $\mathbb{PS}^n \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$, $\Rightarrow \exists\, X \in \mathbb{PS}^n \cap \mathcal{A}$, amelyre $\operatorname{rank}(X) \leq r$.
- Barvinok, 2001: $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{S}^n$ affin altér, $\dim \mathcal{A} = \binom{n}{2} - \binom{r+2}{2}$, $\mathbb{PS}^n \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$ és korlátos $\Rightarrow \exists\, X \in \mathbb{PS}^n \cap \mathcal{A}$, amelyre $\operatorname{rank}(X) \leq r$.
- $r = 1$ + Farkas + Slater $\iff$ S-lemma
  NB: $r = 1$ miatt a második eset csak $n \geq 3$-ra működik

Bizonyítások

- Pataki, 1998: $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{S}^n$ affin altér, $\dim \mathcal{A} \geq \binom{n}{2} - \binom{r+2}{2} + 1$, $\mathbb{PS}^n \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$, $\quad \Rightarrow \exists\, X \in \mathbb{PS}^n \cap \mathcal{A}$, amelyre $\operatorname{rank}(X) \leq r$.
  - Elemi, geometriai
  - Konstruktív, sőt polinomiális
- Barvinok, 2001: $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{S}^n$ affin altér, $\dim \mathcal{A} = \binom{n}{2} - \binom{r+2}{2}$, $\mathbb{PS}^n \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$ és korlátos $\Rightarrow \exists\, X \in \mathbb{PS}^n \cap \mathcal{A}$, amelyre $\operatorname{rank}(X) \leq r$.
  - Nem elemi, differenciálgeometriai
  - Nem konstruktív, nincs algoritmus

A numerikus értékkészlet konvexitása

- A primál feladat nem megoldható

$$\Leftrightarrow \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}_\ominus \cap \underbrace{\left\{(x^T A x, x^T B x) : x \in \mathbb{R}^n\right\}}_{\text{konvex! (Dines, 1941)}} = \emptyset$$

- Kicsit általánosabb eredmény
(Poljak, 1998) $n \geq 3$, az A, B_1, B_2 mátrixoknak van PD lineáris kombinációjuk

$$\Rightarrow \left\{(x^T A x, x^T B_1 x, x^T B_2 x) : x \in \mathbb{R}^n\right\} \quad \text{konvex}$$

- Szeparációs bizonyítás
- Norma-feltétel

A rangfeltétel és a konvexitás ekvivalenciája

- Az $\left\{(x^TAx, x^TBx) : x \in \mathbb{R}^n\right\}$ halmaz konvexitása
  - $y, z \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in [0,1]$
  - Kell: $x \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} x^TAx &= \lambda y^TAy + (1-\lambda)z^TAz \\ x^TBx &= \lambda y^TBy + (1-\lambda)z^TBz \end{aligned}$$

- $X = xx^T$ a következő rendszer 1-rangú megoldása

$$\begin{aligned} A \bullet X &= \lambda y^TAy + (1-\lambda)z^TAz \\ B \bullet X &= \lambda y^TBy + (1-\lambda)z^TBz \end{aligned}$$

- Pataki: létezik 1-rangú megoldás

Magasabb rangú megoldások

- Konvex-e

$$\left\{ \sum_{i=1}^{r} x_i^T A_1 x_i, \ldots, \sum_{i=1}^{r} x_i^T A_m x_i \right\} \subseteq \mathbb{R}^m,\ x_i \in \mathbb{R}^n,\ i = 1, \ldots, r?$$

- Ekvivalens alakban

$$\{A_1 \bullet X, \ldots, A_m \bullet X\} \subseteq \mathbb{R}^m,\ X \in \mathbb{R}^{n \times n},\ \operatorname{rank}(X) \leq r$$

- Új konvexitási eredmények

Általános konvexitás

- König-konvexitás $f : X \to Y$, $\forall x_1, x_2 \in X$ létezik x_3, amelyre

$$2f(x_3) \preceq f(x_1) + f(x_2)$$

  rendezés: $x \preceq y \Leftrightarrow y - x \in \mathcal{K} \subseteq Y$ zárt, konvex, ,,szép'' kúp

- Illés és Kassay, 1994
  Legyen $f : X \to Y$ König-konvex, $f(x) \prec 0$ nem megoldható
  $\Rightarrow \exists y \in \mathcal{K}^* \setminus \{0\}$ amelyre $\langle y, f(x) \rangle \geq 0, \forall x \in X$.
- Hogyan lehet a König-konvexitást bizonyítani?
  folytonosság
  együttes értékkészlet konvexitása

König-linearitás

- $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ homogén kvadratikus
- $F(x) := (f(x), g(x))$, $\mathcal{K} = \mathbb{R}^2_{\ominus}$
- $\{F(x) : x \in \mathbb{R}^n\}$ konvexitása miatt

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n \; \exists x_3 : F(x_3) = F(x_1) + F(x_2),$$

  vagyis F König-lineáris.
- További függvények?

Záró gondolatok, további lehetőségek

- További elégséges feltételek
  - Ramana, 1995: NP-teljes (nem meglepő)
  - negatív eredmények
- Bonyolultabb függvények
  - Poljak, 2001: ,,kis'' gömb képe konvex
- Általánosabb dualitás
  - Elégséges mátrixok
- SOS optimalizálás

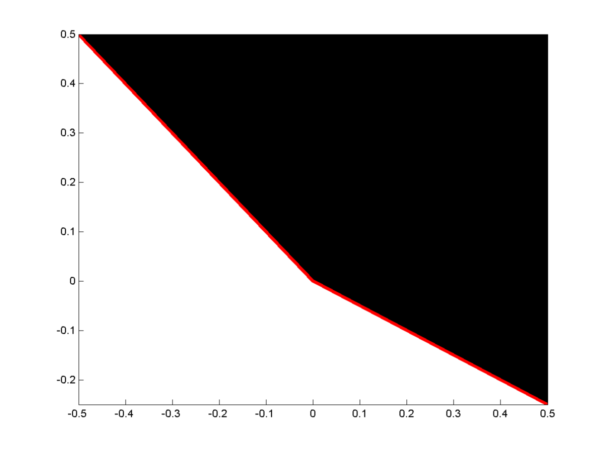
Nemkonvex kvadratikus egyenlőtlenségrendszerek pontos dualitással

Pólik Imre

McMaster University
Advanced Optimization Lab

ELTE TTK Operációkutatási Tanszék
Folytonos optimalizálás szeminárium
2004. július 6.

Figure: $\{(x^T Ax, x^T Bx) : x \in \mathbb{R}^n\}$



$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Vissza a konvexitáshoz!